Letzte Stunde

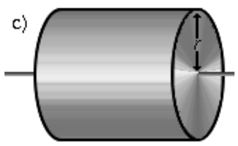
- Der Schwerpunkt entspricht dem Massenmittelpunkt
- Die Lage des Schwerpunktes bezüglich des Lagerpunktes bestimmt das Gleichgewicht (indifferent, labil, stabil)
- In der Statik gilt: $\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad \sum_i \vec{M}_i = 0$
- Bewegungsgleichung $M = J\,\alpha$
- Trägheitsmoment $J = \int_0^m r^2 \mathrm{d}m$

Heute

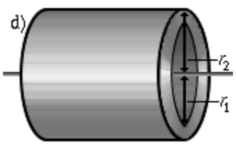
- 5.7. Rotationsenergie
- 5.8 Arbeit und Leistung
- 5.9 Drehimpuls und Drehimpulserhaltung

http://www.ep1.rub.de/lehre/veranstaltungen/ws0910/physikcbg/

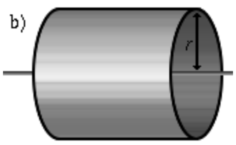
Trägheitsmomente



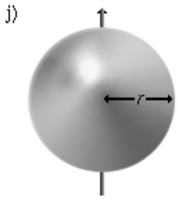
$$J_{Vollzylinder} = \frac{1}{2} m\, r^2$$



$$J_{Hohlzylinder} = \frac{1}{2} m\,(r_1^2 + r_2^2)$$

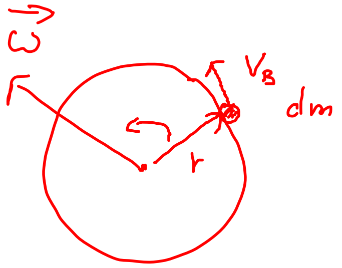


$$J_{Hohlzylinder} = m\, r^2 \qquad \text{(dünnwandig)}$$



$$J_{Kugel} = \frac{2}{5} m\, r^2$$

5.7 Rotationsenergie



$v_B = \omega r$

$$dE_{kin,rot} = \frac{1}{2}\, dm\, v_B^2 = \frac{1}{2}\, dm\, (\omega r)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 (\underbrace{r^2 dm}_{dJ})$$

$$E_{kin,rot} = \int dE_{kin,rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\int r^2 dm}_{J}$$

$$\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2}$$

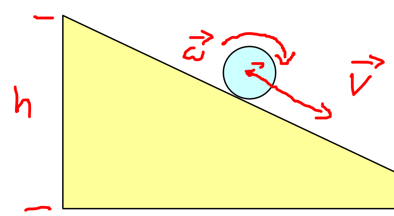
Energieerhaltung:

$$\sum E = \text{const.}$$

Schiefe Ebene

E_{pot}

$m \cdot g \cdot h$



0

$v = \omega r$ (Rollen)

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{1 + \frac{J}{m r^2}}}$$

$$E_{pot} = E_{trans.} + E_{rot}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \frac{v^2}{r^2}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} v^2 \left(m + \frac{J}{r^2}\right)$$

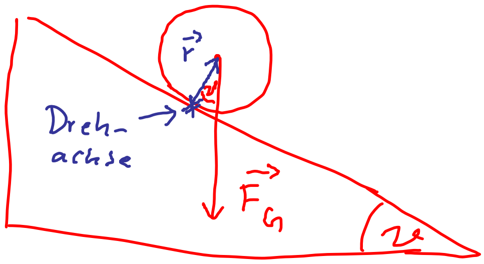
Vollzylinder: $J = \frac{1}{2} m r^2$

Hohlzylinder: $J = m r^2$
(dünnwandig)

$v_{VZ} > v_{HZ}$

$$v_{VZ} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{1 + \frac{1}{2}}}$$

$$v_{HZ} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{1 + 1}}$$

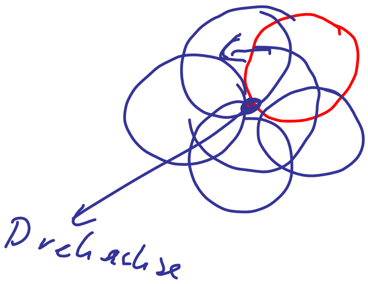


$$\vec M = \vec r \times \vec F_G$$

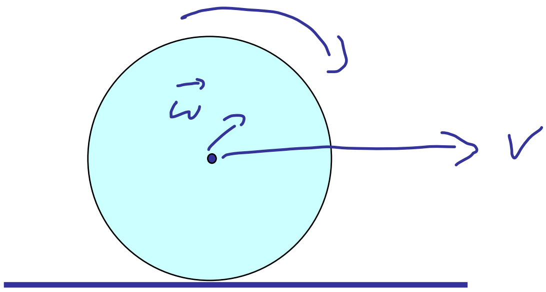
$$\vec M = J \cdot \vec \alpha$$

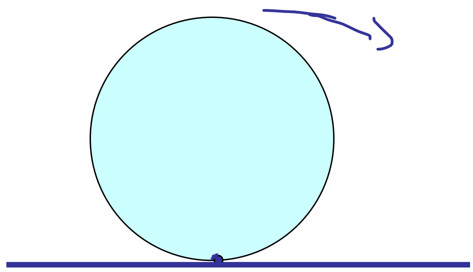
$$\vec r \times \vec F = J \cdot \vec \alpha$$

Trägheitsmoment
um die Drehachse!



Satz von Steiner





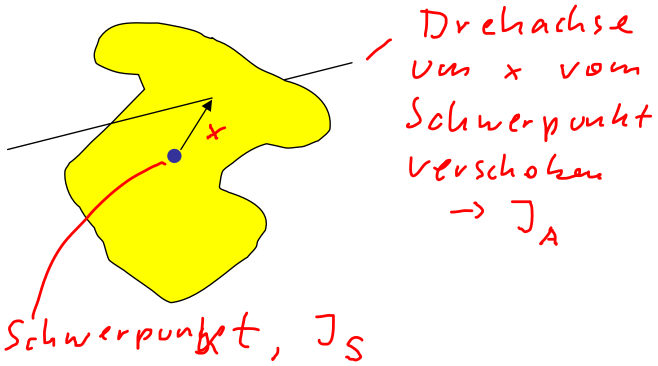
Drehung um eine verschobene Achse
kann als Translation und Rotation
betrachtet werden

$$\frac{1}{2} m \underbrace{v^2}_{\omega^2 r^2} + \frac{1}{2} J_s \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad \Big| \cdot \frac{2}{\omega^2}$$

$$m \cdot r^2 + J_s = J$$

um r verschobene Achse

Satz von Steiner



$$J_A = J_S + m \cdot x^2$$

Das Trägheitsmoment eines Körpers setzt sich additiv zusammen aus dem Trägheitsmoment J_S bezüglich der Schwerpunktachse und dem Trägheitsmoment $m\,x^2$ der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Gesamtmasse des Körpers bezüglich der zur Schwerpunktachse parallelen Drehachse (Abstand x).

5.8 Arbeit und Leistung

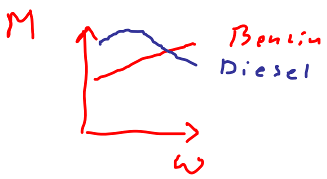
$$ds = d\varphi \cdot r$$

Arbeit

$$dW = F\,ds = F \cdot r \cdot d\varphi = M \cdot d\varphi$$

$$W = \int M\,d\varphi$$

Leistung



$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{M \cdot d\varphi}{dt} = M \cdot \omega$$

$$W \rightarrow E_{rot}$$

$$P = \frac{dE_{rot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = \frac{1}{2} J \frac{d(\omega^2)}{dt}$$

$$P = \frac{1}{2} J\, 2 \omega \dot{\omega} = \underbrace{J \alpha}_{} \cdot \omega = M \cdot \omega$$

$$M = J \cdot \alpha$$

5.9 Drehimpuls und Drehimpulserhaltung

Bewegungsgleichung für die Drehbewegung

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(J \cdot \vec{\omega}) = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ Drehimpuls

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$$[L] = N\,m\,s = \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

für $\vec{M} = 0$ $\quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\vec{L} = const.}}$

Drehimpulserhaltung

Zusammenfassung

- Rotationsenergie $E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} J\, \omega^2$
- Satz von Steiner $J_A = J_S + m\, x^2$
- Arbeit $W = \int M\, \mathrm{d}\varphi$
- Leistung $P = M\, \omega$
- Drehimpuls *L* $\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $\quad \vec{L} = J\, \vec{\omega}$
- Drehimpulserhaltung